

“新民晚报-东方网大力神”超级高考巡回讲座精彩内容回放

既是生活中的常见问题,又是近年来的高考必考题——

数列求和及数列极限的TI计算器求法

储蓄问题,分期付款问题,分阶段(等差或等比数列型)增长或减少的应用问题,这些看似日常生活中不可或缺的实际性的应用题,确实也已成为近年来高考常见和必然涉及的试题,它的背景知识较多,更重要的是,数列应用方面的得分率总是差强人意,可能和我们的研究学习方式的方法有关,学生不太关心那些和数学看似没有太大关系的东西,很少动手去实践,求研究和探索,只知道把模拟试题反复做,可是,实际的综合应用能力普遍不如国外力普遍不如国外同龄学生。

这可能与现行教材有关,我们的教材太缺少实例,即使有,也是缺少时代性、研究性、探索性、以及不同层次的发展性。课外辅导书上题型重复,缺少新意和创造性,到底该怎样提高研究学习的能力?

答案可以不是唯一的,那就是在课堂内外用新型的计算器进行研究性学习。

TI 计算器必须让学生有更多的机会去接受,去研究和应用,只有在实践中让学生明白基本的数学原理,把那些本来很繁琐复杂的计算彻底交给计算器完成,而作为主体的人应该知晓其中的数学内涵即可,通过计算器的辅助学习,恐怕只会让学生更加的热爱原本看似枯燥无味的数学学习,激发他们学习的动机,让他们在研究中获取知识,这样的收获是巨大的,通过这种方式掌握的知识也是相当扎实的。

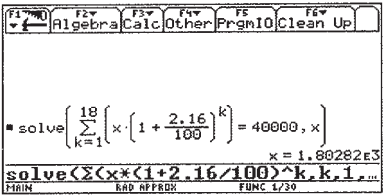
下面使用 TI-92 计算器在数列和数列极限上应用的一些实例。

例题 1 一对夫妇为了给他们的独生子女支付将来上大学的学费,从婴儿一出生就每年到银行储蓄一笔钱,设大学学费四年共需 4 万元,银行教育储蓄利息为月息 1.8‰ 每年利息按复利计算,为了使孩子到 18 周岁上大学时本利和有 4 万元,他们每年应存入多少钱?

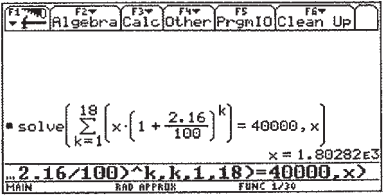
(注:教育储蓄不征收利息税,答案精确到元)

分析求解:每年的年利息是 $1.8‰ \times 12 = 2.16\%$,设每年存入 x 元,18 年后的本利和为: $x(1+2.16\%)^{18} + x(1+2.16\%)^{17} + \cdots + x(1+2.16\%)$,注意,最后一项是 $x(1+2.16\%)$,表示孩子 17 周岁时存入最后一笔教育存款到期后的本利和。问题归结为求解方程: $x(1+2.16\%)^{18} + x(1+2.16\%)^{17} + \cdots + x(1+2.16\%) = 40000$ 的根,此题如用 TI-92 计算器来解过程如下面的图(1)和图(2)所示:

数列知识是高中阶段十分重要的内容。在现阶段我国高中阶段的数学教育中,把一部分大学阶段的预备知识放在高中阶段学习,代数部分就有数列求和、数列极限、初等微积分、函数极值等,不仅要考察学生的抽象思维的能力,还要把数列知识和函数知识结合起来研究,进一步考察学生的综合应用数学知识的创造能力,题型复杂多样。



图(1)



图(2)

由计算器输入计算此题的答案是每年都应当存入银行 1802.82 元。

例题 1 是较早期的高中数学数列求和知识应用的一道试题,假如继续引申到现在的最新利率水平,那么只要适当更改利率数字答案也是很容易通过计算器求出来的。

特别是在计算器的输入行中有一个嵌套应用,一是数列求和,二是解函数方程,此题可以培养学生的综合应用知识的能力。本题的解答可以很快通过计算器求出,有一个先决条件是要有扎实的数学知识和熟练的应用计算器的能力,如果把它传授给学生,我想学生的收获是相当大的。

再来看一道常见的数列求和问题的应用。

例题 2 求数列 $\{a_n\}$, $a_n = 2n^2 - 3n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ 的前 30 项的和 S_{30} 。

分析:通常的代数方法是拆项法。令 $b_n = 2n^2$, $c_n = -3n - 1$,在由公式(1)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad (1)$$

$$\text{即 } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{30} b_k = \sum_{k=1}^{30} 2k^2 = 2 \sum_{k=1}^{30} k^2 = 2 \times \frac{1}{6} \times 30 \times (30+1) \\ (60+1) = 18910$$

$$\sum_{k=1}^{30} c_k = \sum_{k=1}^{30} (-3k-1) = \sum_{k=1}^{30} (-3k) - \sum_{k=1}^{30} 1 = -3 \times \\ \sum_{k=1}^{30} k - 30$$

$$\text{又有公式: } 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (2),$$

$$\text{即 } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

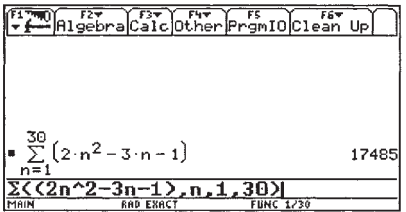
$$\text{则 } \sum_{k=1}^{30} c_k = \sum_{k=1}^{30} (-3k-1) = -3 \times \frac{30 \times 31}{2} - 30 = -$$

$$1425$$

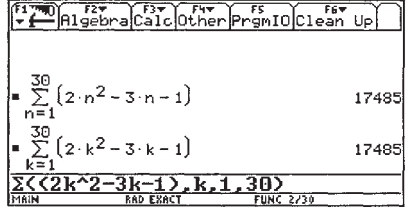
$$\therefore S_{30} = \sum_{k=1}^{30} b_k + \sum_{k=1}^{30} c_k = 18910 - 1425 = 17485$$

我们可以通过另外一种方式求出此题的答案,方法如下:

利用 TI-92Plus 计算器如下图输入



图(3)



图(4)

注意到图(3)和图(4)的输入方式有所不同,但结果是一样的。两种方式各自选择的中间变量不同,图(3)使用 n ,图(4)使用和前面演算过程相同的 k ,这说明在数列求和运算中, TI-92Plus 计算器有着一定的变量自主选择权。应该说是他的一个优点,能够使研究过它的学生从基本上搞清楚整个求和的实质过程,对加深以后的抽象运算是有帮助的,应尽可能让学生深入体会中间变量的作用,不妨让学生对于其它类似的有限项数列求和问题在已有的推理基础上,更多地利用计算器来求值。

例题 3 已知数列 $\{a_n\}$, $a_n = \begin{cases} 2n-1, & n=2k-1 \\ 3^n, & n=2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$,求它的前 2002 项和 S_{2002} 。

分析:此数列是一个典型的分段型数列,通常的方法就是分类讨论,再汇总求和。

$$\text{令 } b_k = a_{2k-1} = 4k-3, c_k = a_{2k} = 3^{2k} = 9^k,$$

则 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_k$ 即分别为数列 $\{a_n\}$ 中的 $a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2k-1}$,

$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k$ 分别为数列 $\{a_n\}$ 中的 $a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{2k}$

求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 并非简单,

1° 当下标 n 为偶数时,参与相加求和的项为偶数个,且最后一项必是数列中的偶数项 a_{2k}

2° 当下标 n 为奇数,参与相加求和的项为奇数个,且最后一项必是数列中的奇数项 a_{2k-1} ,

1° $n=2k$ 时,奇数项和偶数项各有 k 项,

$$\text{则 } S_n = S_{2k} = \sum_{k=1}^k b_k + \sum_{k=1}^k c_k$$

$$S_{2k} = \sum_{k=1}^k (4k-3) + \sum_{k=1}^k 9^k = \frac{1}{2}k(4k-2) +$$

$$\frac{9(1-9^k)}{1-9}$$

$$\text{再将 } k = \frac{n}{2} \text{ 代入上式,得 } S_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{9}{8}$$

$$(3^{n-1})$$

2° $n=2k-1$ 时,奇数项有 k 项,偶数项有 $(k-1)$ 项,又 $S_{2k} = S_{2k-1} + a_{2k}$,只要把 S_{2k} 减去 a_{2k} 即可得到, $\therefore S_{2k-1} = S_{2k} - a_{2k} = \frac{1}{2}k(4k-2) + \frac{9(1-9^k)}{1-9} - 9^k$

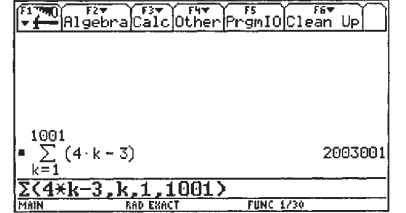
$$\text{再将 } k = \frac{n+1}{2} \text{ 代入上式,化简得,}$$

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{9}{8}(3^{n-1}-1)$$

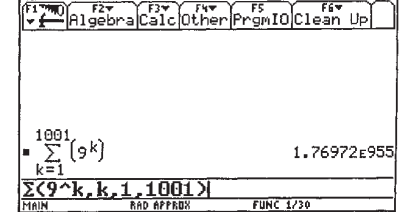
$$\text{现在求 } S_{2002} \text{ 的值,代入 } S_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{9}{8}$$

$$(3^{n-1}-1) \text{ 可得 } S_{2002} = 2003001 + \frac{9}{8}(3^{2002}-1)$$

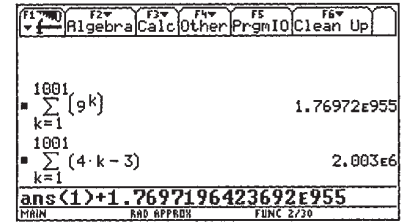
同样的方法使用计算器求和,注意在 MODE 中选择 SCIENTIFIC (科学计数)及 APPROXIMATE(近似值),否则,计算器无法得到所要计算的答案。先计算前 1001 项奇数项,再计算前 1001 项偶数项,然后汇总计算最后的值。如图(5)-图(8)所示:



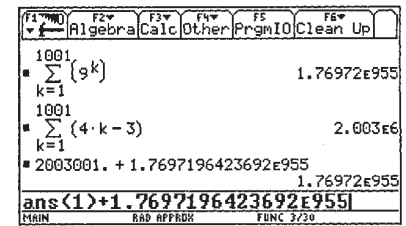
图(5)



图(6)



图(7)



图(8)

这种运算是建立在已有的数列知识的基础上的,要求学生能对数列求和原理掌握清楚,这样,才能让他们更好地去使用辅助工具解题。使用计算器教学有激发学生探索学习的兴趣,著名的教育家波利亚说过:“只有兴趣才能更好激发学习动力,才能更好地学好知识。”有了计算器,学生会感到有了很强的帮手,通过比较可以发现,计算器的参与,使学生学数学的愿望比以前强烈许多,这是很可喜的,当然,现有的实际问题中的确有很多很适合用计算器来解决,不加以一一叙述。

上南高级中学 高天河

“新民晚报-东方网大力神”超级高考巡回讲座 (5 年来专为高考学生专业设计课程)					
讲座日期	讲座地点	讲座时间	针对人群	讲座科目	讲座主题
10 月 13 日 (周六)	人民广场 地区	12:50-14:30	针对现高三	物理	机械能守恒
		12:50-14:30		化学	电解质溶液一
		15:00-16:40		数学	数列的常见考试题型及求解策略一
		17:10-18:50	针对现高二	语文	命题作文讲解
		19:45-20:55		英语	动名辨析(暂定)
		14:50-16:30		语文	作文剖析三
10 月 14 日 (周日)	人民广场 地区	16:55-18:35	英语	情态动词	
		19:15-20:55	数学	不等式的解法(暂定)	
		8:00-10:10	英语	高考阅读理解一(暂定)	
10 月 20 日 (周六)	人民广场 地区	10:30-12:40	针对现高三	英语	高考阅读理解二(暂定)
		12:50-14:30		物理	振动和波
		12:50-14:30		化学	电解质溶液二
		15:00-16:40	数学	数列的常见考试题型及求解策略二	
		17:10-18:50	针对现高二	语文	历年高考作文汇总讲解
		19:45-20:55		英语	词汇与语法(暂定)
14:50-16:30	语文	古诗词(暂定)			
10 月 21 日 (周日)	人民广场 地区	16:55-18:35	英语	综合题型分析	
		19:15-20:55	数学	不等式的应用(暂定)	
		8:00-10:10	英语	高考写作分析(暂定)	
讲座老师	所有主讲老师均为市重点特级、高级教师中的佼佼者,具体情况请拨打热线电话咨询。				
特别提醒	掌握正确的学习方法与高考应试技巧是提高高考分数的关键。欢迎广大高三、高二、高一同学把握听讲机会,积极参与,备战高考。				
特别提示	以上主题均为暂定主题,若有变动,以老师现场所讲内容为准。 请家长、考生购票前先电话确认票子是否已经售完,以免白跑。开放时间内请拨打电话咨询详情,非开放时间电话无人接听,敬请谅解。				
热线电话:52281282,52281286					
购票地点:静安区陕西北路 80 号 10 楼“东方网大力神”高考讲座办公室					
开放时间:每周一至每周五 13 时至 19 时整					