【新民晚报高考专家解读】

视觉设计:黄 娟

数学高考



常见递推数列解题策略

数列是高中数学中的一个重要知识点,也是高考中的 重点内容之一,考纲中对于递推数列的要求则是达到了探 究性理解水平。

递推数列一般指根据数列中项与它的前一项(或前相 邻几项)之间的关系来确定的数列,这个关系式也称为说 推公式。广言之,根据数列的前几项,利用相关关系式(项 与项之间关系、项与前 n 项和关系等)确定的数列皆为递 推数列。我们所熟悉的等差数列、等比数列可以说是最简

单的递推数列。等差数列的递推表示: $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d(n \in N^*) \end{cases}$

等比数列的递推表示: $\left\{\frac{\mathbf{a}_{n+1}}{\mathbf{a}} = \mathbf{q} (\mathbf{q} \neq \mathbf{0}, \mathbf{n} \in \mathbf{N}^*)\right\}$ 。结合高考要

求,常见的递推数列主要有以下几种:

1、等差、等比推广型:

由递推关系 : $\binom{a_1=a}{a_{n+1}=a_n+f(n)}(n\in N^*)$ 确定的数列 $\{a_n\}$ 称 之为等差数列推广型,当 f(n)为常数时,此数列即为等差

由递推关系 : $egin{dcases} a_1 = a \\ a_{n+1} = f(n)a_n \ (n \in N^*)$ 确定的数列 $\{a_n\}$ 称之 为等比数列推广型,当 a≠0 且 f(n)是不为零的常数时,此 数列即为等比数列。

【例 1】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_i=1$, $a_{n+1}=a_n+2n(n\in N^*)$, 求 a_{no} 分析:仿等差数列通项公式的推导方法,将递推公式 转化为 an+l-an=f(n),利用"累加法"。

解:由 an+1=an+2n,得 an+1-an=2n,当 n≥2 时,则有 $a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$

 $a_{n-1} - a_{n-1} = 2(n-2)$

..... ,将此 n-1 个式子相加得:a_n-a₁=n (n-1)

 $a_3 - a_2 = 2 \times 2$

 $|a_2-a_1|=2\times 1$

(n≥2),又 a₁=1,则 a_n=n²-n+1,a₁=1 满足此式,所以数列{a_n} 的通项公式为 a_n=n²-n+1。

【例 2】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$, 求 a_n 。 分析:仿等比数列通项公式的推导方法,把递推公式

转化为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ =f(n),利用"累积法"。

解:将 $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$ 化为: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$,分别令 n=1,2,3, $\dots,(n-1)$,代入上式将得到的(n-1)个等式相乘得: $\frac{a_2}{a} \cdot \frac{a_3}{a}$

 $\frac{2}{3}$,所以 $a_n = \frac{2}{3n}$ 。

2、一阶线性递推型(等差、等比拓展型):

由递推关系: $\left| egin{align*} a_1 = a \\ a_{n+1} = pa_n + q \end{array} \right. (n \in N^*)$ 确定的数列 $\{a_n\}$ 称

为一阶线性递推数列。在此递推关系中,若有 p=1,则知 $\{a_n\}$ 是等差数列,若有 $q=0(p\neq 0, a\neq 0)$,则知 $\{a_n\}$ 是等比数 列。因此,此递推式又可以称为等差、等比拓展型,等差数 列与等比数列则是它的一个特例。

【例 3】已知数列{a_n}中,a₁=1,a_{n+1}=2a_n+3,求 a_n。

解法一:"分配常量法",将递推公式 and =pan+q 中的常 数 q"分配"给 and 与 an 后转化为等比数列。

解: 由递推公式 a_{n+1} = $2a_n$ +3, 设 a_{n+1} -t= $2(a_n$ -t), 即 a_{n+1} = 2a_n-t,得 t=-3。故递推公式为 a_{n+1}+3=2(a_n+3),令 b_n=a_n+3,则 b_i = a_i +3=4,且 $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ = $\frac{a_{n+1}+3}{a_n+3}$ =2。所以{ b_n }是以 b_i =4为首项,2为公比的等比数列,则 b_n=4×2ⁿ⁻¹=2ⁿ⁺¹,所以 a_n=2ⁿ⁺¹-3。

解法二: "倍乘累加法",将递推公式 a_{n+1} = pa_n +q 化为 n-pa_n=q,分别令 n=1,2,3,……,(n-1)后得到 n-1 个等式, 倍乘 p 后进行累加相消后求出 a_n 。

解:由 a_{n+1}=2a_n+3,得 a_{n+1}-2a_n=3,分别令 n=1,2,3,……, (n-1)倍乘 2 得:

 $a_n - 2a_{n-1} = 3 \Longrightarrow a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 1$

 $a_{n\!-\!1}\!\!-\!2a_{n\!-\!2}\!\!=\!3\!\Longrightarrow\!\!2a_{n\!-\!1}\!\!-\!2^2a_{n\!-\!2}\!\!=\!3\!\times\!2$

 a_{n-2} -2 a_{n-3} =3 \Longrightarrow 2 $^2a_{n-2}$ -2 $^3a_{n-3}$ =3 \times 2 2

 $\begin{array}{l} a_3 \!\!-\! 2a_2 \!\!=\! 3 \!\!\Rightarrow\! 2^{n\!-\!3} \! a_3 \!\!-\! 2^{n\!-\!2} \! a_2 \!\!=\! 3 \!\!\times\! 2^{n\!-\!3} \\ a_2 \!\!-\! 2a_1 \!\!=\! 3 \!\!\Rightarrow\! 2^{n\!-\!2} \! a_2 \!\!-\! 2^{n\!-\!1} \! a_1 \!\!=\! 3 \!\!\times\! 2^{n\!-\!2} \end{array}$

相加得: $a_n-2^{n-1}a_1=3\times 1+3\times 2+3\times 2^2+\cdots+3\times 2^{n-3}+3\times 2^{n-2}=3\times (2^{n-1}-1)$,又 $a_i=1$,所以 $a_i=2^{n-1}+3\times (2^{n-1}-1)=2^{n+1}-3$ 。

解法三:"消常法",利用相邻的关系式,将递推公式 a_{n+l}=pa_n+q 中的常数 q 消去,转化成等比数列,再累加得通 项公式。

解:由 a_{n+1} = $2a_n$ +3,则 a_n = $2a_{n-1}$ + $3(n \ge 2)$,两式相减得: a_{n+1} -a_n=2(a_n-a_{n-1})。由 a₁=1,知 a₂=2a₁+3=5,则 a₂-a₁=4,所以数列 {a_n-a_{n-1}}(n≥2)是以 4 为首项,2 为公比的等比数列。得 a_na_{n-1}=4×2ⁿ⁻²=2ⁿ(n≥2)。则数列{a_n}转化为:

 $\left\{ \substack{a_n-a_{n-1}=2^n \ (n\geqslant 2)},$ 仿例 1 利用累加法,可得 $a_n=2^{n+1}-3$ 。

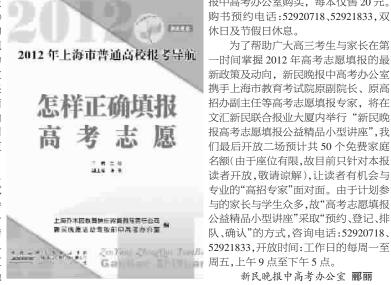
【例 4】已知数列 $\{a_n\}$ 满足: a_1 =2, a_n =2 a_{n-1} +2 $^{n+1}$ (n \geq 2)求数 列{a,}的通项公式。

解:由 $a_n=2a_{n-1}+2^{n+1}$ 得 $a_n-2a_{n-1}=2^{n+1}$ 两边同除以 2^n 得 $\frac{a_n}{2^n}$ $-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}$ =2,设 b_n = $\frac{a_n}{2^n}$,则 b_n - b_{n-1} =2。所以数列 $\{b_n\}$ 是以 b_1 = $\frac{a_1}{2}$ = 1为首项,2为公差的等差数列。则 b_n =1+(n-1)×=2n-1,即 $\frac{a_n}{2^n} = 2n-1$, 所以 $a_n = 2^n(2n-1)$.

格致中学 数学高级教师 朱兆和

最后加印的一批志愿填报书籍即将售罄 高考志愿填报小型讲座尚留 50 个免费名额

《2012年上海市普通高校报 考导航-怎样正确填报高考志愿》 一书在近一个月内,家长与同学的 需求出乎意料的火爆,曾一度出现 '一书难求"的尴尬场面,那是因为 在市场上同类书籍"增厚增价、过 度包装"的同时,我们反而主动采 取"瘦身降价",将复杂的事情做简 单,我们将无关紧要的、多余的内 容全部删除,剩下最主要、最有用 的内容, 既节约了读者的金钱, 更 节省了读者的时间。该书包括"自 我准确定位,志愿填报技巧" "2012 年上海普通高校招生考试 政策调整"、"历年平行志愿填报参 考案例"等几大实用部分,最后一 批加印的书籍将于近日内售罄,请 广大家长与考生抓住最后机会,尽 早前往静安区威海路 755 号"文汇 新民联合报业大厦"42楼新民晚



报中高考办公室购买,每本仅售20元。 购书预约电话:52920718、52921833,双 休日及节假日休息。

为了帮助广大高三考生与家长在第 一时间掌握 2012 年高考志愿填报的最 新政策及动向,新民晚报中高考办公室 携手上海市教育考试院原副院长、原高 招办副主任等高考志愿填报专家,将在 文汇新民联合报业大厦内举行"新民晚 报高考志愿填报公益精品小型讲座",我 们最后开放二场预计共50个免费家庭 名额(由于座位有限,故目前只针对本报 读者开放,敬请谅解),让读者有机会与 专业的"高招专家"面对面。由于计划参 与的家长与学生众多, 故"高考志愿填报 公益精品小型讲座"采取"预约、登记、排 队、确认"的方式,咨询电话:52920718、

的"特级教师1对1公益诊断"活动,受到了沪 上正在备战高考的学生及家长们的极大关注. 有幸参与过此公益诊断活动的家庭给予了认可

文"写作板块"上依然存在着不少困惑,高考语 文写作一类卷 55 分关口成了大多数考生的 "难关",本报中高考办公室将本着"为百姓办 实事"的原则,飞入寻常百姓家,为晚报读者服 务,特邀请语文高考界元老、语文特级教师,计 划于"五一"劳动节期间为高三考生特别增开 一场主题为"高考语文写作黄金 24 招"的精品 小型课程,对外开放的20个家庭全部为免费 名额,这是一堂让家长听后都能领悟高考作文 审题与解题思路的课程,为体现课程效果,特 别要求家长陪同学生一起听课,全程接受大家

一位真正的名师,无论其拥有的是特级头衔 还是高级教师的职称,更应是一位有良好师德的 教师,感谢这些学科的特级教师们为广大晚报读 者发起了这样一个振奋人心的公益活动,相信同 学们通过"四两拨千斤"的学习方法指点,为学生 真正"减负",真正名师主讲的课程甚至可以让家 长听得懂,上述主讲的语文特级教师就是其中

约、逐步放号、有序排队、精确档期"的方式进行, 报名预约电话:52920718、52921833。

近一个月以来,由本报中高考办公室举办

在高考即将来临之际,不少考生在高考语

主办方预期报名人数众多,故采取"电话预 新民晚报中高考办公室 徐甦敏

新民晚报东方大力神 高考中考名师辅导

媒体背景,正规放心! 10 年成果,绝无加盟!



高考冲刺班、中考冲刺班 仅剩少量余额! −高二学业水平考冲刺班 沪上首家试点!

班级名称	针对	开设学科	次 数	上课日期
	VI //3	语文	2次	O 70
春 季 周 六 班	高三			4月30日(周一)
(最后一轮复习)	考生	数学	2次	5月5日(周六)
(仅剩2次)		英语	2次	
		语 文	2次	
春季周日班	高三 考生	数 学	2次	4月29日(周日) 5月6日(周日)
		英 语	2次	
		物理	2次	
· bc 40 = 50 /		化学	2次	
高考冲刺班 (9门同开) (沪上首举)	高三考生	语 文	6次	5月12日(周六) 5月13日(周日) 5月19日(周六) 5月20日(周日) 5月20日(周日) 5月27日(周日)
		数 学	6次	
		英 语	6次	
		物理	6次	
		化学	6次	
		政治	6次	
		历史	6次	
		生物	6次	
		地理	6次	
		语文	4次	
中 考 冲 刺 班 (5门全开) (次次精彩)	初三考生	数学	4次	6月2日(周六) 6月3日(周日) 6月9日(周六) 6月10日(周日)
		英语	4次	
		物理	2次	
		化学	2次	
		物理	4次	
学 考 冲 刺 班 (学业水平考试) (沪上首家试点)	高二考生	化学	4次	6月2日(周六) 6月3日(周日) 6月9日(周六)
		生命科学	4次	
		历史	4次	
	高一	地理	4次	6月10日(周日)

考生 信息科技 4次 十大 名 校,特 级 高 级 教 师,真 名 师 真 减 负

曾培养上万名"高考裸考"500分以上高分学员,欢迎验证上足每节课90分钟,上课不做作业,不浪费时间,拒绝普通补习 特级高级教师"四两拨千斤"学习方法点拨,拒绝"题海" 当天问题当天解决,问题不隔夜,每天有"收获"带回家 优秀学生会失考,普通学生爆冷门,年年如此,勿毁在临门。

新民晚报活动专版部中高考办公室 咨询热线: 52920718、

情 提 示:上 门 报 名 前,请 来 电 确 认 报名地址:静安区威海路755号文汇新民联合报业大厦42楼 开放时间:周一至周五,09:00至17:00,双休日及节假日休息 地铁: 2号线南京西路站4号出口,7号线静安寺站9号出口

1号线陕西南路站2号出口,10号线陕西南路站6号出口 公交:01,15,20,21,23,24,37,41,48,49,71,104,112,127 128, 146, 148, 738, 921, 925, 927, 935, 936, 939, 955路等